

41-AMALIY MASHG'ULOT

Ish vaqti va bosqichlari	O'qituvchi faoliyatining mazmuni	Talabalar faoliyatining mazmuni
I-Bosqich O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mashg'ulot mavzusi bo'yicha tushuncha berish. 1.2. Mavzuning avvalgi o'tilgan mavzu bilan aloqadorligi bo'yicha tushuncha berish	Tinglaydilar, yozadilar
II-Bosqich Asosiy (65 daqiqa)	2.1. Amaliy mashg'ulot mavzusiga oid nazariy ma'lumot berish. 2.2. Mavzuga oid amaliy topshiriqlar bajarish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.
III-Bosqich Yakunlovchi (5 daqiqa)	3.1. Amaliy mashg'ulotni yakunlash 3.2. Talabalarga mustaqil bajarish uchun topshiriqlar berish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.

41-MAVZU: UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR

Mashg'ulot rejasi

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.
2. Zichlik funksiyasi.

Asosiy tushuncha va atamalar: uzluksiz tasodifiy miqdorlar, zichlik funksiyasi, ehtimollar nazariyasining klassik, statistic va geometrik ta'riflari.

Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni har doim ham jadval ko'rinishida berilavermaydi. Masalan, uzluksiz tasodifiy miqdor uchun uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini sanab chiqish mumkin emas.

1-ta'rif. Har bir $x \in R$ uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qandaydir qiymat qabul qilish ehtimolini beradigan

$$F(x) = P(X < x)$$

funksiya X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi yoki integral taqsimot funksiyasi deyiladi.

Agar X diskret tasodifiy miqdor bo'lib $x_1, x_2, \dots$ qiymatlarini $p_1, p_2, \dots$ ehtimollar bilan qabul qilsa, uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$P(X < x) = \sum_{x_i < x} P_i$$

Taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$;
3. Agar $x_1 < x_2$ bo'lsa, $F(x_1) \leq F(x_2)$;
4. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

2-ta’rif. X uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining differensial funksiyasi yoki zichlik funksiyasi deb:

$$f(x) = F'(x)$$

funksiyaga aytiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lsa, uning taqsimot funksiyasi quyidagiga teng:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. $f(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$.

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari tegishli bo'lgan (a,b) oraliqda

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar, } x \leq a, \text{ bo'lsa} \\ \frac{1}{b-a}, \text{ agar, } a < x \leq b, \text{ bo'lsa} \\ 0, \text{ agar, } x > b, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

zichlik funksiyaga ega bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor (a,b) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Agar zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar, } x < 0, \text{ bo'lsa} \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ agar, } x \geq 0, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, X uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimoti ko'rsatkichli taqsimot deyiladi.

1-misol. X – diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish: Ko'rinish turibdiki, $x \in (-\infty; -2]$ uchun $X < x$ hodisa mumkin bo'lmagan hodisa bo'ladi, ya'ni:

$$F(x) = 0$$

Endi $x \in (-2; 1]$ bo'lsin. U holda:

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -1) = 0,1$$

Agar $x \in (-1; 0]$ bo'lsa,

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0,1 + 0,2 = 0,3$$

Huddi shuningdek, $x \in (0; 1]$ bo'lsa,

$$F(x) = 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,5.$$

Agar $x \in (1; 2]$ bo'lsa,

$$F(x) = 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,4 = 0,9$$

Agar $x > 2$ bo'lsa, $F(x) = P(X < x) = 1$,
chunki ixtiyoriy $x > 2$ uchun $X < x$ hodisa muqarrar hodisa bo'ladi.

Shunday qilib, $F(x)$ taqsimot funksiyaning analitik ifodasini quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -2, \text{ bo'lsa,} \\ 0,1, & \text{agar } -2 < x \leq -1, \text{ bo'lsa,} \\ 0,3, & \text{agar } -1 < x \leq 0, \text{ bo'lsa,} \\ 0,5, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \text{ bo'lsa,} \\ 0,9, & \text{agar } 1 < x \leq 2, \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x > 2, \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

2-misol. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya bilan berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -1, \text{ bo'lsa} \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & \text{agar } -1 < x \leq \frac{1}{3}, \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x > \frac{1}{3}, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning $(0; \frac{1}{3})$ intervalda yotgan qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish: Taqsimot funksiyaning 2-xossasiga asosan:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Bu formulaga $a = 0$, $b = \frac{1}{3}$ ni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(0 < X < \frac{1}{3}) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right]_{x=\frac{1}{3}} - \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right]_{x=0} = \frac{1}{4}$$

3-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa} \\ \sin 2x, & \text{agar } 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x > \frac{\pi}{4} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan, $f(x)$ zichlik funksiyani toping.

Yechish: Zichlik funksiya taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga teng:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar, } x \leq 0, \text{ bo'lsa} \\ 2 \cos 2x, \text{ agar, } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa} \\ 0, \text{ agar, } x > \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

4-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar, } x \leq 0, \text{ bo'lsa} \\ \cos x, \text{ agar, } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa} \\ 0, \text{ agar, } x > \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

F(x) taqsimot funksiyani toping.

Yechish:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz$$

formuladan foydalanamiz. Agar $x \leq 0$ bo'lsa, $F(x)=0$

Demak,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dz = 0$$

Agar $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dz + \int_0^x \cos z dz = \sin x$$

Agar $x > \frac{\pi}{2}$ bo'lsa

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dz + \int_0^{\pi/2} \cos z dz + \int_{\pi/2}^x 0 dx = \sin z \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Demak, izlanayotgan taqsimot funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar, } x \leq 0, \text{ bo'lsa} \\ \sin x, \text{ agar, } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa} \\ 1, \text{ agar, } x > \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

Misollar va masalalar

1. X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyaga ega.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar, } x \leq 0, \text{ bo'lsa} \\ \frac{2}{3} \sin 3x, \text{ agar, } 0 < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ bo'lsa} \\ 0, \text{ agar, } x > \frac{\pi}{3} \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$ intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

2. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar, } x \leq 0, \text{ bo'lsa,} \\ \sin x, \text{ agar, } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar, } x > \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan. $f(x)$ zichlik funksiyani toping.